线性代数　中国科学技术大学 2023 春
欧氏空间

主讲: 杨金榜
地空楼 525

助教: 苏煜庭、陈鉴、夏小凡

定理 (标准正交基使度量矩阵最简)

设 V 为 n 维欧氏空间. 设 G 为内积在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下的度量矩阵. 则

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_n \text{ 为标准正交基} \quad \Leftrightarrow \quad G = I_n.$$

下面将讨论标准正交基的存在性.

定理 (Schmidt 正交化)

给定欧氏空间的任意一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$. 递归地定义

$$\beta_k = \alpha_k - \sum_{i=1}^{k-1} (\alpha_k, e_i) e_i \neq 0 \text{ 以及 } e_k = \frac{\beta_k}{|\beta_k|}.$$

则 $e_1, \cdots, e_n$ 为一组标准正交基使得 (对所有的 $i = 1, 2, \cdots, n$)

$$\langle \alpha_1, \cdots, \alpha_i \rangle = \langle e_1, \cdots, e_i \rangle.$$

推论

对任意正定矩阵 A, 存在可逆实矩阵 P 使得 $A = P^T P$.

正交变换

定义 (正交变换)

设 $\mathscr{A}$ 为欧氏空间 V 上的线性变换. 若 $\mathscr{A}$ 保持内积, 即对任意 $a,b \in V$,

$$(\mathscr{A}a, \mathscr{A}b) = (a,b),$$

则称 $\mathscr{A}$ 为正交变换.

定理 (正交变换的等价刻画)

设 $\mathscr{A}$ 为欧氏空间 V 上的线性变换. 则以下几条等价

1. $\mathscr{A}$ 正交;
2. $\mathscr{A}$ 保持向量长度;
3. $\mathscr{A}$ 将标准正交基变为标准正交基.

定理 (全体正交变换在复合运算下构成群)

设 V 为欧氏空间. 则

1. 单位变换为正交变换;
2. 正交变换的复合仍然为正交变换;
3. 正交变换可逆且其逆也为正交变换.

正交变换在标准正交基下的矩阵

设正交变换 $\mathscr{A}$ 在标准正交基 $e_1, \cdots, e_n$ 下的矩阵为 A.
这个矩阵 A 满足什么特别的性质?

$$
\begin{aligned}
\mathscr{A}\text{正交} &\Leftrightarrow \mathscr{A}e_1, \cdots, \mathscr{A}e_n\text{为标准正交基} \\
&\Leftrightarrow (\mathscr{A}e_i, \mathscr{A}e_j) = \delta_{ij}(\text{对任意的}1 \le i, j \le n) \\
&\Leftrightarrow \left(\sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell i}e_\ell, \sum_{k=1}^{n} a_{kj}e_k\right) = \delta_{ij}(\text{对任意的}1 \le i, j \le n) \\
&\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij}(\text{对任意的}1 \le i, j \le n) \\
&\Leftrightarrow A^TA = I_n
\end{aligned}
$$

定义 (正交矩阵)

若 n 阶实方阵 A 满足 $A^TA = I_n$(或 $A^{-1} = A^T$), 则称 A 为正交矩阵.

注: 正交矩阵的行向量 (或列向量) 构成 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基 (在标准内积下).

正交变换在标准正交基下的矩阵

定理

设 $\mathscr{A}$ 为欧氏空间 V 上的线性变换, 则 $\mathscr{A}$ 为正交变换当且仅当 $\mathscr{A}$ 在标准正交基下的矩阵 A 为正交矩阵.

$$\text{正交变换 } \mathscr{A} \xleftrightarrow[1:1]{\text{标准正交基}} \text{正交矩阵 } A$$

定义 (第一类变换, 第二类变换)

设 A 为正交矩阵. 则 $A^TA = I$. 因此 $\det(A) = \pm 1$.

1. 若 $\det(A) = 1$, 则称 $\mathscr{A}$ 为第一类变换;
2. 若 $\det(A) = -1$, 则称 $\mathscr{A}$ 为第二类变换.

例

三维空间或在二维空间的旋转为第一类变换, 而镜面反射为第二类变换.

性质

设 $\mathscr{A}$ 为欧氏空间 V 上的正交变换.

1. 则 $\mathscr{A}$ 的特征值模长都为 1. 特别地, 实特征值只可能为 ± 1.
2. 若 V 的维数为奇数且 $\mathscr{A}$ 为第一类正交变换, 则 1 为 $\mathscr{A}$ 的特征值.

证明思路: (1). 设 A 为 $\mathscr{A}$ 在某组标准正交基下的矩阵. 设 $A(\xi) = \lambda\xi$, 则

$$\overline{\xi}^T\xi = \overline{\xi}^T\overline{A}^T A\xi = \overline{\lambda}\lambda\overline{\xi}^T\xi.$$

因此 $|\lambda| = 1$.
(2). 多项式 $\varphi_{\mathscr{A}}(\lambda)$ 为实系数, 其复根共轭成对出现. 而实根仅取 ± 1. 若 1 不为特征值, 则 -1 出现奇数次, 因此行列式为 -1. 矛盾!

推论

三维空间中的第一类正交变换保持一个向量不变, 从而一定为旋转变换.

转置与伴随变换

n 维欧氏空间	$\xleftrightarrow[1:1]{\text{标准正交基基}\alpha_1,\cdots,\alpha_n}$	$\mathbb{R}^n$(带标准内积)
线性变换 $\mathscr{A}$	$\xleftrightarrow[1:1]{\mathscr{A}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A}$	矩阵 A
正交变换 $\mathscr{A}$	$\xleftrightarrow[1:1]{\mathscr{A}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A}$	正交矩阵 A
??	$\longleftrightarrow$	转置矩阵 A^T

定理

设 $\mathscr{A}$ 为欧氏空间 V 上的线性变换. 设 $\mathscr{A}$ 在标准正交基 $e_1,\cdots,e_n$ 下的矩阵为 A. 则

1. 存在唯一的 V 上的线性变换, 记为 $\mathscr{A}^*$, 满足

$$(\mathscr{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\mathscr{A}^*\beta),\quad (\forall\alpha,\beta\in V).$$

2. 线性变换 $\mathscr{A}^*$ 在基 $e_1,\cdots,e_n$ 下的矩阵为 A^T.

称 $\mathscr{A}^*$ 为 $\mathscr{A}$ 的伴随变换.

证明思路: 存在性: 证明矩阵 A^T 对应的线性变换满足性质. 唯一性: 若 $\mathscr{B}$ 也满足条件, 则仅需证明 $|(\mathscr{A}^*-\mathscr{B})(\beta)|=0$ 对所有的 β 成立.

伴随变换的基本性质

性质

1. $(\mathscr{A}^*)^* = \mathscr{A}$;
2. $(\mathscr{A} + \mathscr{B})^* = \mathscr{A}^* + \mathscr{B}^*$;
3. $(\lambda\mathscr{A})^* = \lambda\mathscr{A}^*$;
4. $(\mathscr{A} \circ \mathscr{B})^* = \mathscr{B}^* \circ \mathscr{A}^*$;

性质

设 $\mathscr{A}$ 为欧氏空间上的线性变换. 则

$$\mathscr{A} \text{ 正交} \quad \Leftrightarrow \quad \mathscr{A}^*\mathscr{A} = \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \mathscr{A}^* \text{ 正交}.$$

对称变换与对称矩阵

定义 (对称变换, 自伴随变换)

设 $\mathscr{A}$ 为欧氏空间 V 上的线性变换. 若 $\mathscr{A} = \mathscr{A}^*$, 则称 $\mathscr{A}$ 为 V 上的对称变换(或自伴随变换).

注: $\mathscr{A}$ 对称 $\Leftrightarrow (\mathscr{A}a, b) = (a, \mathscr{A}b)\ \forall a, b \in V$.

定理

设 A 为某欧氏空间上的线性变换 $\mathscr{A}$ 在某组标准正交基下的矩阵. 则

$$\mathscr{A} \text{ 为对称变换} \Leftrightarrow A \text{ 为实对称矩阵}.$$

证明: $\mathscr{A}$ 对称 $\Leftrightarrow \mathscr{A}^* = \mathscr{A} \Leftrightarrow A^T = A \Leftrightarrow A$ 对称.

定理

对称变换的不同特征值对应的特征向量正交.

证明思路: $(\mathscr{A}(\xi_1), \xi_2) = (\xi_1, \mathscr{A}(\xi_2)) \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot (\xi_1, \xi_2) = 0$.

推论

实对称矩阵 A 的属于不同特征值的特征向量正交.

下面将证明实对称矩阵总是可对角化的.

性质

实对称矩阵的特征值都为实数.

证明思路: 设 $A\xi=\lambda\xi(\xi\neq 0)$. 由于 A 为实矩阵, $A\overline{\xi}=\overline{A\xi}=\overline{\lambda}\cdot\overline{\xi}$. 由于 A 对称, 我们有 $(A\overline{\xi})^T\xi=\overline{\xi}^T(A\xi)$. 因此 $\overline{\lambda}=\lambda$.

定理

任意 n 阶实对称矩阵 A, 存在 n 阶正交矩阵 T 使得 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵.